数理解析研究所講究録
620巻 1987年 93-102

リボン表示に関する問題

神大理　中西康剛(Yasutaka Nakanishi)

n 次元球面の $(n+2)$ 次元ユークリッド空間への埋め込みである n 次元結び目の1つの類として　n 次元リボン結び目がある。本稿では　次の定義を採る。

<u>定義</u>.　n 次元結び目 K^n がリボンであり，$(K^n, \{f_i(D^n \times I)\}_{i=1}^m)$ が K^n の m 個のバンドを伴なうリボン表示であるとは，次の条件 C_n がみたされるときにいう。

C_n: (1)　自明な絡み輪 $S_0^n \cup S_1^n \cup \cdots \cup S_m^n \subset R^{n+2}$ が存在する。

(2)　(a), (b) をみたす埋め込み $f_i : D^n \times I \to R^{n+2}$ $(1 \leq i \leq m)$ が存在する。

(a)　$$f_i(D^n \times I) \cap S_j^n = \begin{cases} f_i(D^n, 0) & (j=0 \text{ のとき}) \\ f_i(D^n, 1) & (j=i \text{ のとき}) \\ \emptyset & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

(b)　$f_i(D^n \times I) \cap f_j(D^n \times I) = \emptyset$　$(i \neq j)$

(3)　$K^n = S_0^n \cup S_1^n \cup \cdots \cup S_m^n \cup \{\bigcup_{i=1}^m f_i(\partial D^n \times I)\} - int\{\bigcup_{j=1}^m f_j(D^n \times \partial I)\}$.

ここで $f_j(D^n\times I)$ を バンドと呼ぶ。

このとき，次の命題が成り立つ。

命題1．([5],[6]) $(K^n,\{f_i(D^n\times I)\}_{i=1}^m)$ を 条件 C_n をみたす n 次元リボン結び目 K^n の m 個のバンドを伴なうリボン表示とする。このとき，R^{n+2} を R^{n+3} の切断面 $R^{n+2}\times\{0\}$ とみなせば，

$S_i^n=S_i^{n+1}\cap R^{n+3}\times\{0\}$，$f_j(D^n\times I)=g_j(D^{n+1}\times I)\cap R^{n+3}\times\{0\}$ $(0\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq m)$，

条件 C_{n+1} をみたす $(n+1)$ 次元リボン結び目 K^{n+1} とその m 個のバンドを伴なうリボン表示 $(K^{n+1},\{g_i(D^n\times I)\}_{i=1}^m)$ が存在する。

更に，この様な K^{n+1} は 全同位の範囲で唯1つである。

命題2．([7]) $n(\geq 2)$ 次元リボン結び目は少なくとも1つの赤道結び目を伴なう。

簡単にいうと，リボン結び目は，同じリボンの型を伴なう1つ次元の高いリボン結び目を自然に導くし，これの逆も成り立つ。

ここで注意するべき点は，リボンの型を指定すれば 導き方が自然で唯一であるということである。

例えば，樹下寺坂結び目([2])は，1次元リボン結び目である。これの導く2次元リボン結び目を考えると，一般の位置

の議論によりバンドは自明と見なせる。つまり，2次元結び目として自明とわかる。自明な2次元結び目はリボン結び目として，多くの異なる赤道結び目を伴なうということであり，他の2次元リボン結び目においても同様である。

リボン結び目を扱うとき，こうした面も研究されるべきであると思われる。§1 でこれを考えることにする。

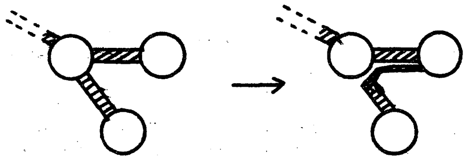
§2では，補空間のファイバー構造をこの側面から考える。

§1 リボン表示の問題

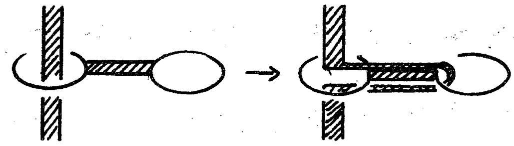
次元が1つ上（又は，下）にどう導くかを考えることにすると，例えば，リボン結び目とこれから離れた自明な結び目を自明なバンドでつないで新らしいリボン結び目ができるが，元のものとの差異は無視したいであろう。そこで，リボン結び目が1つ与えられたとき，そのリボン表示の間に次の関係により定まる同値類を定め　これについて問題設定をする。

(0)　リボン表示（$K_1^n, \mathcal{B}_1$），（$K_2^n, \mathcal{B}_2$）が S^{n+2} の同相写像で集合としてうつりあう。（向きづけ，バンドの順は無視する。）

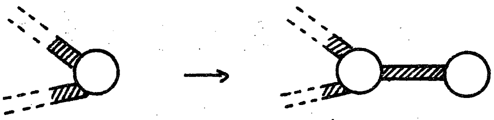
(1)　バンド　をすべらせる。



(2) バンドをバンドに沿ってとりかえ，絡む球面を変える。



(3) 自明なバンドを附ける。



定義. 上の操作(0),(1),(2),(3)及びその逆操作を有限回することにより リボン表示 $(K, \mathcal{B}_1)$, $(K, \mathcal{B}_2)$ がうつりあうとき この2つのリボン表示は**安定同値**であると呼ぶ。

命題3. 安定同値なリボン表示により自然に導かれる1つ次元の高いリボン結び目は 同じ結び目型に属する。

もちろん この命題が成り立つように同値関係を導入したのであるが，次は如何であろうか。

問題A(n). n 次元リボン結び目 K^n が与えられたとき，そのリボン表示はすべて安定同値であるか。また，異なるものがあるとすれば 何種類でもあるのか。

問題B(n). n 次元リボン結び目 K^n のリボン表示 $(K^n, \mathcal{B}_1)$, $(K^n, \mathcal{B}_2)$ により自然に導かれた $(n+1)$ 次元リボン結び目 K_1^{n+1}, K_2^{n+1} が，同じ結び目型に属するとき，2つのリボン表示は安

定同値であるか。(注意：同じリボン結び目K^n上のリボン表示に対し考えている。)

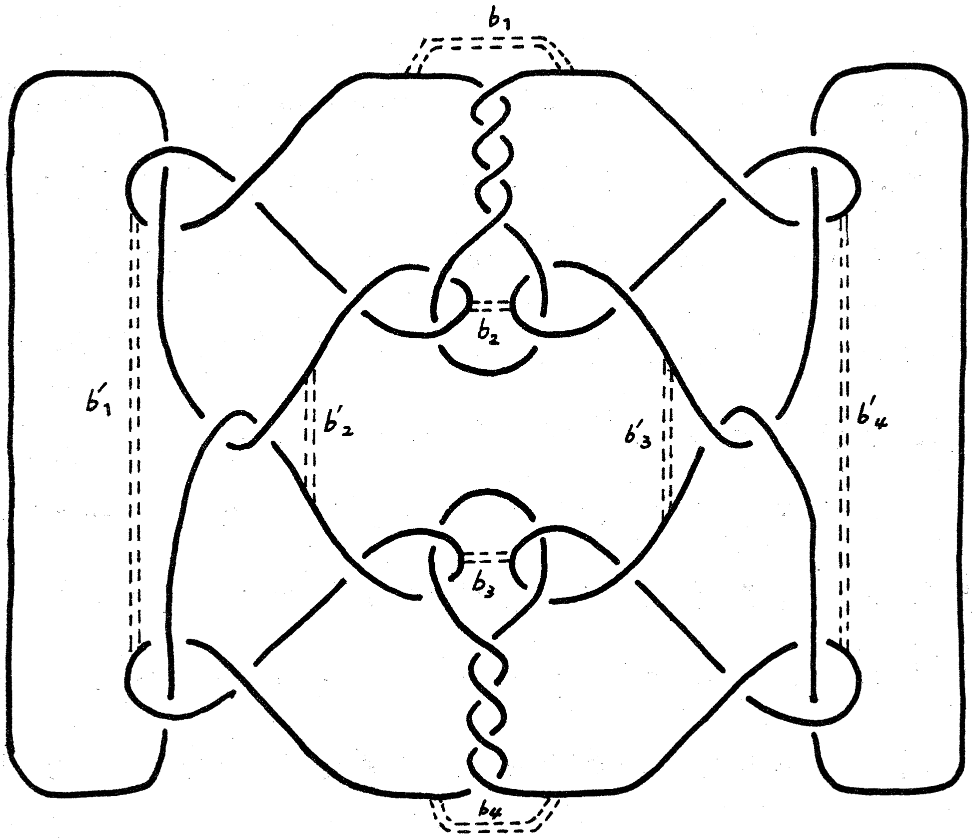
リボン結び目の特殊性から　上下の次元で実行する安定同値に関する操作は相似的なので，A$(n+1)$とB(n)は同値である。また，バンドに対し一般の位置の議論及び命題1,2を考えれば，A(n) $(n \geq 2)$は同値であるとわかる。さらに，補空間の基本群を考え，リボン表示により自然に導かれる群表示(ヴィルティンガー表示)を通すと　先の操作(0),(1),(2),(3)は群表示の変型と見ることができ，群表示の問題ともいえる。難しい問題であると思われる。

さて，残るA(1)については，中川氏と筆者の共同研究[3]により，任意の自然数nに対して　n種類の安定同値でないリボン表示をもつ1次元リボン結び目の存在が示されている。(「安定同値」による表現はしていないが，自然に導かれる2次元リボン結び目が異なる結び目型に属するので　より強い主張である。) なお，1次元リボン結び目kとその鏡像k^*の連結和を考えると異なるリボン表示は容易に見つかるため，結び目が素であるかというのも重大な点である。ただ，2次元結び目に関し，連結和に関する素分解はその存在すら不明で

あるため　これに言及することは困難になっている。§2でも表現が一部難があるのもこのためである。

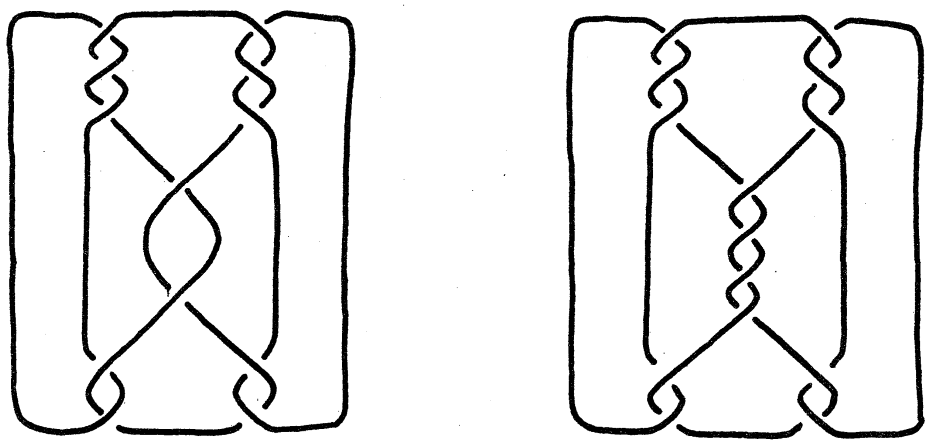
§2　ファイバーリボン結び目

1次元リボン結び目kがあるリボン表示$(k, \mathcal{B})$により自然に2次元リボン結び目Kを導いていたとしよう。kがファイバーであれば，Kもファイバーであるとの予想があり，かなりの線まで肯定的に研究されているが完全解決には至っていない。この§2では　こうしたファイバー構造も自然に導かれるものであるかどうか考えたい。興味深い例を次に示す。



この太い実線で描かれた1次元結び目kを考える。破線で示したバンド$b_1, b_2, b_3, b_4, b'_1, b'_2, b'_3, b'_4$に関して，$\mathcal{B}_1=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$，$\mathcal{B}_2=\{b'_1, b'_2, b'_3, b'_4\}$とおくと，$(k, \mathcal{B}_1)$，$(k, \mathcal{B}_2)$はそれぞれ1次元リボン結び目のリボン表示になっている。

リボン表示$(k, \mathcal{B}_1)$，$(k, \mathcal{B}_2)$により自然に導びかれる2次元リボン結び目をK_1, K_2で表すことにすると，これらの結び目型は異なる。実際　それぞれ次の図で示される1次元結び目（これもまたリボン!!）k_1, k_2のひねりのないスパン結び目と同じ結び目型を有する。

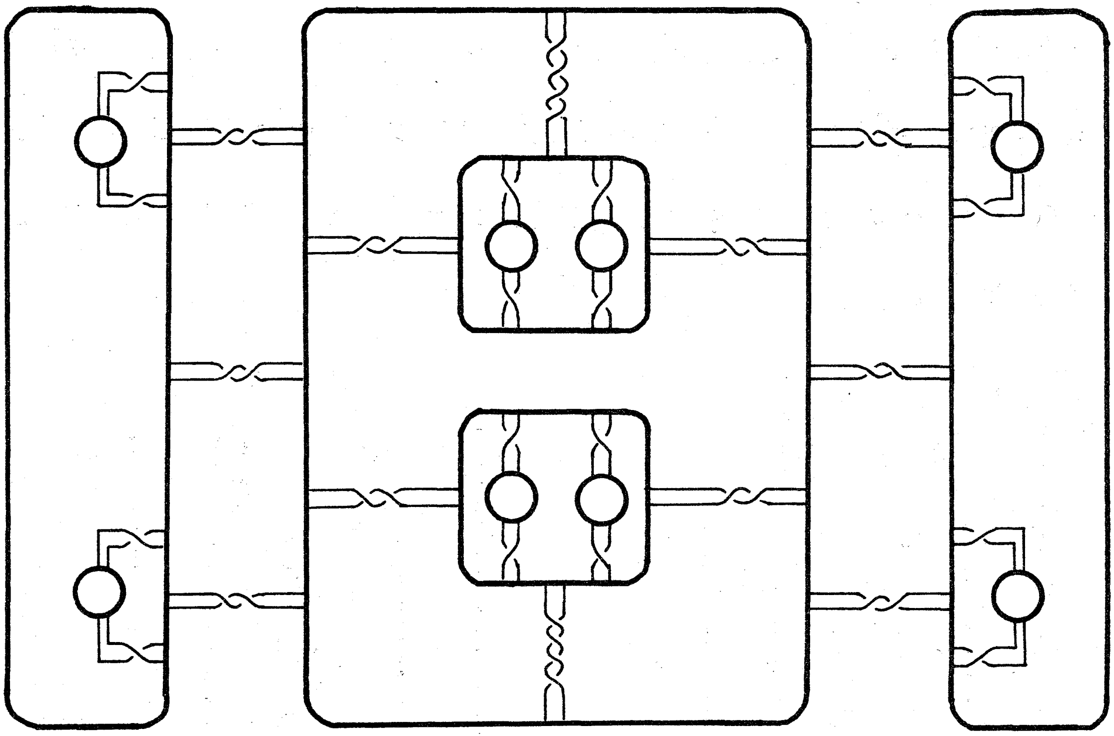


k_1　　　　k_2

結び目型により定まる初等イデアルの列が異なることにより，結び目型の異なることを判定する。（アレクサンダー多項式は一致している。）また，k_1, k_2が1次元結び目として素であることにも注目したい（前田氏によれば，K_1，K_2の結び目が，群レベルで素であるというのに“近い”そうである。）

K_1, K_2 はスパン結び目であるので，ファイバー結び目である。

はじめに与えた1次元リボン結び目 k がファイバーであることは　図を少し見易くして　金信氏の p-surface [1] の議論を用いるとわかる。



最後に，k が素であることは　筆者の [4] でのタングルによる議論を用いると容易にわかる。

以上をまとめると次の通りである。

<u>命題</u>.　次の条件をみたす1次元リボン結び目 k とその適当なリボン表示から自然に導かれる2次元リボン結び目 K_1, K_2 が存在する。

(1)　K_1, K_2 は２次元結び目として異なる型に属する。

(2)　k は１次元結び目として素である。

(3)　K_1, K_2 は　素な１次元結び目の結び目群と　同型な結び目群を伴なう。

(4)　k, K_1, K_2　は　ファイバー結び目である.

ここで　以下の問題が生じる。

<u>問題</u>.　K_1, K_2 の補空間のファイバー構造は　k の補空間のファイバー構造の自然な拡張になっているだろうか。つまり，４次元内のファイバー構造の $R^3\times\{0\}$ による切断が３次元内のファイバー構造となっているか。少し弱めれば，$R^3\times[0,\infty)$ をとりだせば，(円板対の) ファイバー　となっているか。

正しいとすると，常にそうであるのか。拡張の仕方の相異はどの様なものなのか。

正しくないなら，拡張できるのはどの様なときなのか。その障害理論が構成できないか.

いずれにせよ，とても興味深いと筆者は考える。

References

[1] T. Kanenobu: The augmentation subgroup of a pretel link, Math. Sem. Notes Kobe Univ., 7(1979), 363-384.

[2] S. Kinoshita and H. Terasaka: On unions of knots, Osaka Math. J. 9(1957), 131-153.

[3] Y. Nakanishi and Y. Nakagawa: On ribbon knots, Math. Sem. Notes Kobe Univ., 10 (1982), 423-430.

[4] Y. Nakanishi: Primeness of links, Math. Sem. Notes Kobe Univ., 9(1981), 99-108.

[5] S. Suzuki: Knotting problems of 2-spheres in 4-sphere, Math. Sem. Notes Kobe Univ., 4(1976), 241-371.

[6] T. Yajima: On a characterization of knot group of some spheres in R^4, Osaka J. Math. 6(1969), 435-446.

[7] T. Yanagawa: On cross-sections of higher dimensional ribbon knots, Math. Sem. Notes Kobe Univ., 7(1979), 609-628.

11